

$y = f(x)$ と表されている時の導出の方法

$$L = \int_a^b \sqrt{\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}^2 + \left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\}^2} dt$$

まで授業で導出しました。では、 $y = f(x)$ のように媒介変数で表示されていないときはどうなるのか考えてみましょう。

$y = f(x)$ を t を媒介変数として無理矢理 $x = t, y = f(t)$ と媒介変数で表示する。(いま、公式における $f(t)$ は t となっており、 $g(t)$ は $f(t)$ になっていることに注意しましょう。)

これを L の式に当てはめると

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left\{\frac{d}{dt}t\right\}^2 + \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}^2} dt \\ & (= \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt) \end{aligned}$$

となります。よって授業の冒頭で書いてあった公式が示せました。